Διαφορικές Εξισώσεις 1 — 27/02/18

1ο Μάθημα

e-mail: cpalaska@cc.uoi.gr

Στο site του μαθηματικού τα βιβλία του κυρίου φίλου: θεωρία, 2ο με ασκήσεις.

- Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ύπαρξης και μονοσήμαντου λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών.

- Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα
  - Ομογενή Γραμμικά Διαφορικά Συστήματα
  - Μη ομογενή " " "
  - Γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές)

$\boxed{\text{Με αυτά θα ασχοληθούμε}}$

- Θεωρούμε μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση
- f ορισμένη σε ένα σύνολο $V \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad V \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

Μια εξίσωση της μορφής $u' = f(x, u(x))$ (1) λέμε ότι είναι μια n-διάστατη διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την u και ανεξάρτητη μεταβλητή την x.

- Έστω I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας. Μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση <u>u λέγεται λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) στο διάστημα I</u> αν-ν η u είναι <u>παραγωγίσιμη στο I</u> και επιπλέον για όλα τα $x\in I$ ισχύει ότι $(x, u(x)) \in V$. Επίσης η u ικανοποιεί τη σχέση $u'(x) = f(x, u(x)), \forall x\in I$

• Εαν $x_0 \in I$ και $(x_0, u(x_0)) \in V$ τοτε μια λυση της διαφορικης εξισωσης (1) στο διαστημα I τετοια ωστε να τηρει την αρχικη συνθηκη $u(x_0) = u_0$ (2) λεγεται λυση του προβληματος Αρχικων Τιμων (1)-(2)

• Εστω $F_1, F_2, \ldots, F_n$ συναρτησεις οριζομενες σε ενα συνολο $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ενα συστημα της μορφης

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= F_1(t, u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \frac{du_2}{dt} &= F_2(t, u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= F_n(t, u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Θα λεμε οτι ειναι ενα n-διαστατο συστημα πρωτης ταξης συνηθων διαφορικων εξισωσεων με αγνωστες συναρτησεις τις $u_1, u_2, \ldots, u_n$ και ανεξαρτητη μεταβλητη την t.

• Αν I ειναι διαστημα της πραγματικης ευθειας. Μια n-άδα συναρτησεων $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ θα λεγεται λυση στο I του διαφορικου συστηματος (3) αν-ν
1) οι $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ειναι παραγωγισιμες στο I.
για ολα τα $t \in I$, $(t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) \in V$
2) και επιπλεον $u_k'(t) = F_k(t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$

$k = 1, 2, \ldots, n$

• Εαν $(t_0, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) \in V$, $t_0 \in I$
Τοτε μια λυση $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ του διαφορικου συστηματος που πληροι την αρχικη συνθηκη
$u_1(t_0) = u_{10}$, $u_2(t_0) = u_{20}$, ..., $u_n(t_0) = u_{n0}$ (4)
θα λεγεται λυση του προβληματος αρχικων τιμων (3), (4).

• Εαν θεσουμε τα εξης:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

τοτε το διαφορικο συστημα (3) μπορει να παρει την εξης μορφη:

$$u' = F(t, u)$$

Ενω θετοντας $u_0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{n0} \end{pmatrix}$

η αρχικη συνθηκη γινεται:

$$u(t_0) = u_0.$$

Συνεπως: καθε n-διαστατο διαφορικο συστημα μπορει να γραφει σαν μορφη μιας n-διαστατης ~~[illegible]~~ διανυσματικης διαφορικης εξισωσης.

• Απο την άλλη πλευρά αρκετοί τύποι συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορούν να μετασχηματιστούν και να λάβουν τη μορφή διαφορικού συστήματος.

Π.χ:
Θεωρούμε την n-τάξης συνήθη Δ.Ε
$$u^{(n)} = f(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)})$$

Θέτουμε: $u_1 = u$,
$u_2 = u'$
$u_3 = u''$
$\vdots$
$u_n = u^{(n-1)}$

Οπότε παραγωγίζοντας αυτές τις σχέσεις έχουμε:
$$\frac{du_1}{dt} = u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_3$$

$\vdots$

$$\frac{du_n}{dt} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = u^{(n)} = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

• Θα θεωρούμε ότι $F: I \times V \to \mathbb{R}^n$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^n$
Υπενθυμίζουμε: ότι μια διαφορική εξίσωση με ένα σύνολο αρχικών συνθηκών (δηλαδή συνθηκών που προσδιορίζονται από τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε ένα σημείο) λέγεται πρόβλημα αρχικών τιμών.

• Ειδική μορφή n-διάστατων διαφορικών συστημάτων είναι τα <u>γραμμικά διαφορικά συστήματα</u>.

$$u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n + v_1$$
$$u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n + v_2$$
$$\vdots$$
$$u_n' = a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n + v_n$$

όπου a_{ij}, $i,j=1,\dots,n$ και v_j, $j=1,\dots,n$ είναι συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.
Εάν θέσουμε $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$

και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$

Τότε το γραμμικό διαφορικό σύστημα γράφεται ως
$u' = Au + b$.
Επίσης εάν $x_0 \in I$ και $u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}$ είναι σταθερές το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών γράφεται $u' = Au + b$ και $u(x_0) = u_0$ όπου

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \vdots \\ u_{0n} \end{pmatrix}$$

Την άλλη εβδομάδα → Παρασκευή 6-9 και όχι τρίτη!!

- Έχουμε μια γραμμική Δ.Ε n-τάξης της μορφής
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b \quad (1)$$

όπου a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ και b είναι συναρτήσεις ορισμένες σε ενα διάστημα I και $a_n(t) \neq 0$ $\forall t \in I$
Εαν $t_0 \in I$ και $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ είναι σταθερές τότε η εξίσωση μαζί με τις συνθήκες (2)

$$y(t_0) = y_{10}, \; y'(t_0) = y_{20}, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(t_0) = y_{n0}$$
αποτελούν πρόβλημα αρχικών τιμών.

Θέτοντας
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}\right] \quad \text{Τότε} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = y_n' = \left(y^{(n-1)}\right)' = -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} y' - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}$$

και αν $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b}{a_n} \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$

το σύστημα γίνεται $y' = Ay + B$.

Άσκηση:

Να γράψετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών ως πρόβλημα αρχικών τιμών που αφορά μια διανυσματική Δ.Ε.

1) $u_1' = u_2^2 + 1$ και $u_1(0) = 1$

$u_2' = t + u_1^3$ $\quad u_2(0) = -2$

Απάντηση:

Θέτω $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $u(0) = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = u_0$

και $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

με $f(t, u) = \begin{pmatrix} u_2^2 + 1 \\ t + u_1^3 \end{pmatrix}$

τότε $u' = f(t, u(t))$

$u(0) = u_0$

2) $e^t u''' - 7t(u')^2 + u^3 + \cos t = 0$

και $u(0) = u'(0) = 1$ και $u''(0) = -2$

Απάντηση:

$\left.\begin{array}{l} u_1 = u \\ u_2 = u' \\ u_3 = u'' \end{array}\right\}$ τότε $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ και $\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u''' = \frac{7t(u')^2}{e^t} - \frac{u^3}{e^t} - \frac{\cos t}{e^t} \end{array}$

$= \frac{7t}{e^t} u_2^2 - \frac{u_1^3}{e^t} - \frac{\cos t}{e^t}$

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f(t,u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_3' = \frac{7t}{e^t} + (u_2)^2 - \frac{u_1^3}{e^t} - \frac{\cos t}{e^t} \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση</u>:

Να μετατρέψετε το σύστημα Δ.Ε

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_3 \\ u_2' &= e^t u_1 + u_2 - \sin t\, u_3 \\ u_3' &= u_1 \end{aligned}\right\}$$

με συνθήκες $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 2$, $u_3(0) = 7$ σε πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής $u' = A \cdot u$.

<u>Απάντηση</u>:

Θέτουμε $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ e^t & 1 & -\sin t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

και $u(0) = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Τότε έχουμε ότι το σύστημα παίρνει τη μορφή $u' = Au$ και η αρχική συνθήκη $u(0) = u_0$

Άσκηση:

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$u' = f(t,u), \quad u(1) = u_0, \quad \text{όπου } u_0 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$$

και $f(t,u) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2^2 - \log^2 t \\ t e^{-t} u_1 - t + \frac{1}{t} \end{pmatrix}, t > 0$

Να δείξετε ότι έχει λύση την $u(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \log t \end{pmatrix}, t > 0$

Απάντηση:

$I = (0, +\infty)$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ και $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$

Έχουμε i) $u'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 1/t \end{pmatrix}$

Επιπλέον ii) $f(t, u_1(t), u_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t + (\log t)^2 - \log^2 t \\ t e^{-t} e^t - t + \frac{1}{t} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = u'(t)$

Επίσης iii) $u(1) = \begin{pmatrix} e^1 \\ \log 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = u_0$

Άρα ισχύει.

• Έστω I διάστημα της πραγματικής ευθείας και $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Ορισμός: Έστω $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ και $u_0 \in V$. Έστω επίσης

εσωτερικό του I

το Π.Α.Τ. $u' = F(t,u)$, $u(t_0) = u_0$. Εάν υπάρχει $\tau > 0$ με $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \subseteq I$

και u παραγωγίσιμη συνάρτηση με $u : [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to V$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση $u'(t) = F(t, u(t))$,

$t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ και $u(t_0) = u_0$. Τότε λέμε ότι

u είναι μια τοπική λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών. Εάν η u ορίζεται σε ολόκληρο το I τότε λέγεται ολική λύση.

Π.Χ: Έστω το εξής Π.Α.Τ.

$$u' = -2\sqrt{u}, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

Έχει μη μηδενική λύση;

Απάντηση:

Για κάθε $t \geq 0$ πρέπει $u(t) \geq 0$ (1) ότε $-2\sqrt{u(t)} \leq 0$

Άρα $u'(t) \leq 0$, $\forall t \geq 0$

Άρα u φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Άρα $u(t) \leq u(0) = 0$ άρα $u(t) \leq 0$ (2)

Από τις (1), (2) έχω ότι $u(t) = 0$

• Κανονικές ως ανάλογες βαθμίδες

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ θα το παριστάνουμε ή ως διάνυσμα γραμμή $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ή ως διάνυσμα στήλη $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^n$ μια απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$ η οποία αποτελεί εσωτερικό γινόμενο

Με τη βοήθεια αυτής ορίζουμε

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ως εξής

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ που αποτελεί στάθμη για το $\mathbb{R}^n$.

Ισχύει: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Πράγματι $|\langle x, y \rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} (x x_i + y_i)^2 \geq 0$$

ή $x^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$

Θεωρώντας την τελευταία σχέση ως τριώνυμο (με αγνωστο το x) εφόσον $\sum x_i^2 \geq 0$ θα ισχύει ότι το τριώνυμο είναι ≥ 0 $\forall x$ εάν $\Delta \leq 0$ ή

• $\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0$

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = |x| \cdot |y|.$

Επίσης $|x+y|^2 = |\langle x+y, x+y\rangle| = |\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle| =$

$= |\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle| =$

$= \left| |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \right| \leq |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 \leq$

$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

Άρα $|x+y| \leq |x| + |y|$.

• Για κάθε διανυσματική συνάρτηση $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a, b]$, και x_i παραγωγίσιμες έχουμε $x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$

Επίσης αν x_i ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ τότε

$$\int_a^b x(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \int_a^b x_2(t)\,dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)\,dt\right)$$

Ορισμός: Θεωρούμε δυο μετρικούς χώρους (X, ρ_1) και (Y, ρ_2) και μια συνάρτηση $f: X \to Y$. Θα λέμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ή είναι συνάρτηση Lipschitz εάν υπάρχει $L > 0$ ~~τέτοιο~~ έτσι ώστε:

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq L\rho_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

- Εάν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U του x που η f να είναι Lipschitz στη U τότε λέμε ότι η f είναι τοπικά Lipschitz (ή εάν για κάθε $x_0 \in X$ υπάρχουν $L > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε $\forall x, y \in X$ με $\rho_1(x, x_0) < \delta$ και $\rho_1(y, y_0) < \delta$ να ισχύει ότι $\rho_2(f(x), f(y)) \leq L\rho_1(x, y)$)

Πρόταση: Αν $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, με $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

- παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq L$, για κάποιο $L > 0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο $[a, b]$.

Απόδειξη:
Έστω $x, y \in [a, b]$. Τότε από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι ~~[illegible]~~ $\exists\, \xi \in (a, b)$ ώστε $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$

- Άρα $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|$.

Προταση:
· Εαν η f ικανοποιει την συνθηκη Lipschitz τοτε η f ειναι ομοιομορφα συνεχης.

<u>Αποδειξη:</u>

f ομοιομορφα συνεχης $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y)$:

$\rho_1(x,y) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \rightarrow$ Το δειχνουμε παρακατω:

Αλλα η f Lipschitz, συνεπως $\exists L > 0$ τ.ω $\forall x, y \in X$

να εχουμε $\rho_2(f(x), f(y)) \leq L \rho_1(x,y)$

Συνεπως εαν $\varepsilon > 0$ επιλεξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ εχουμε

τοτε οτι αν $\rho_1(x,y) < \delta$ τοτε $\rho_2(f(x), f(y)) \leq L \rho_1(x,y) \leq$

$\leq L\delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \leq \varepsilon$